Lösung: Serie 3

1. (a) Es seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Es bezeichne $G \subset \mathbb{R}^2$ die Gerade welche durch die Punkte $x, y \in X$ verläuft. $\mathbb{R}^2 \setminus G$ ist die disjunkte Vereinigung zweier offener Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^2$ (welche durch die Gerade G getrennt werden) so dass $U' := U \cap X \neq \emptyset$ und $V' := V \cap X \neq \emptyset$. U' und V' sind offen in X. Damit ist X die disjunkte Vereinigung der nichtleeren offenen Teilmengen $U', V' \subset X$, und somit nicht zusammenhängend.
(b) Wir wählen $x = (0,1)$ und $y = (0,-1)$. Dann ist

$$Y \setminus \{x, y\} = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$$

wobei

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \text{ und } x \in [-1,1]\}, \\ Y_2 &= \big\{\big(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)\big\}, \\ Y_3 &= \big\{\big(\cos(\varphi), \sin(\varphi)\big) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in (-\pi/2, \pi/2)\big\}. \end{aligned}$$

Es ist einfach zu sehen, dass Y_1, Y_2 und Y_3 wegzusammenhängend sind (Wieso?). Da $Y_1 \cap Y_2 = \{(-1,0)\} \neq \emptyset$ ist somit auch $Y_1 \cup Y_2$ wegzusammenhängend. Da $(Y_1 \cup Y_2) \cap Y_3 = \{(1,0)\} \neq \emptyset$ ist schliesslich $Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3 = Y \setminus \{x,y\}$ wegzusammenhängend, insbesondere auch zusammenhängend.
(c) Es bezeichne $\mathcal{T}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^2$. Angenommen $h : Y \to X$ ist eine bijektive Abbildung. Nach (b) existieren Punkte $x, y \in Y$ mit $x \neq y$ so dass $(Y' := Y \setminus \{x,y\}, \mathcal{T}_{Y'})$ zusammenhängend ist. Setze $X' := X \setminus \{h(x), h(y)\}$. Gemäss (a) ist $(X', \mathcal{T}_{X'})$ nicht zusammenhängend. Wäere $h : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T}_X)$ ein Homöomorphismus – eine stetige bijektive Abbildung deren Umkehrabbildung stetig ist –, so wäre auch $h|Y' : (Y', \mathcal{T}_{Y'}) \to (X', \mathcal{T}_{X'})$ ein Homömorphismus. Wegen obigem ist dies aber unmöglich, denn Zusammenhang ist eine *topologische Eigenschaft* (das heisst, invariant unter Homöomorphismen).
Nochmal: Falls zwei topologische Räume homöomorph sind, bedeutet dies dass sie topologisch betrachtet identisch sind (d.h. alle Eigenschaften, welche ausschliesslich über die Topologie definiert sind, stimmen in beiden Räumen überein).

2. X ist weder wegzusammenhängend noch zusammenhängend. Betrachte die offenen Teilmengen

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ und } y > \frac{1}{2x}\} \quad \text{und} \\ V_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ und } y < \frac{1}{2x}\} \end{aligned}$$

von $\mathbb{R}^2$. V_1 und V_2 sind offensichtlich disjunkt, $V_1 \cap X \neq \emptyset$, $V_2 \cap X \neq \emptyset$ und $X \subset V_1 \cup V_2$. Somit ist X nicht zusammenhängend. X kann deshalb auch nicht wegzusammenhängend sein.

3. Zuerst der Fall $|A| = 2$. Seien X und Y zusammenhängende topologische Räume. Sei weiter $(a,b) \in X \times Y$ und

$$f\colon X \times Y \longrightarrow \{0,1\}$$

eine beliebige stetige Abbildung. Wir müssen zeigen, dass f konstant ist. Betrachte die stetige surjektive Abbildung

$$\iota\colon X \longrightarrow X \times \{b\}$$

gegeben durch $\iota(x) = (x,b)$. Dann ist $f\big|_{X \times \{b\}} \circ \iota$ stetig und konstant (da X zusammenhängend ist). Somit ist jedoch auch $f\big|_{X \times \{b\}}$ konstant.
Analog sei für jedes $x \in X$ eine stetige surjektive Abbildung

$$\iota_x\colon Y \longrightarrow \{x\} \times Y$$

durch $\iota_x(y) = (x,y)$ gegeben. Dann ist $f\big|_{\{x\} \times Y} \circ \iota_x$ stetig und konstant. Folglich ist auch $f\big|_{\{x\} \times Y}$ konstant. Da $(x,b) \in X \times \{b\} \cap \{x\} \times Y$ ist f eingeschränkt auf

$$T_x := X \times \{b\} \cup \{x\} \times Y$$

konstant.
Da für alle $x \in X$, $(a,b) \in T_x$ und

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} T_x$$

gilt, folgt, dass f auf ganz $X \times Y$ konstant ist. Damit ist gezeigt, dass $X \times Y$ zusammenhängend ist.
Mit Induktion folgt daraus die Behauptung im Fall $|A| < \infty$.

Wir führen nun den allgemeinen Fall auf den Fall $|A| < \infty$ zurück.
Wenn $E = \prod_{\alpha\in A} E_\alpha$ eine disjunkte Vereinigung, $E = U \cup V$ mit $U \cap V = \emptyset$, von nichtleeren offenen Mengen $U, V \subset E$ ist, dann existieren $u \in U$, $v \in V$ sowie eine endliche Indexmenge $B \subset A$ so dass

$$\pi_\beta(u) = \pi_\beta(v) \quad \text{für } \beta \in A \setminus B. \tag{1}$$

(Warum? Gegeben die nichtleeren offenen Mengen U, V so existieren nichtleere Basismengen $U' \subset U$, $V' \subset V$; die Indexmenge

$$B := \{\alpha \in A : \pi_\alpha(U') \neq E_\alpha \text{ oder } \pi_\alpha(V') \neq E_\alpha\}$$

ist endlich weil U', V' Basismengen der Produkttopologie sind. Nun lassen sich $u \in U'$ und $v \in V'$ mit der Eigenschaft (1) wählen.)
Definiere $f : \prod_{\beta\in B} E_\beta \to E$, $(y_\beta)_{\beta\in B} \mapsto (x_\alpha)_{\alpha\in A}$, durch

$$x_\alpha := \begin{cases} y_\alpha & \text{wenn } \alpha \in B; \\ \pi_\alpha(u) & \text{wenn } \alpha \in A \setminus B. \end{cases}$$

Beachte dass $u, v \in \text{Bild}(f)$. f ist stetig, denn $\pi_\alpha \circ f$ ist stetig für alle $\alpha \in A$. Da $U, V \subset E$ offen sind impliziert die Stetigkeit von f dass $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \subset \prod_{\beta\in B} E_\beta$ offen sind. Damit ist $\prod_{\beta\in B} E_\beta$ die disjunkte Vereinigung der nichtleeren offenen Mengen $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ und somit nicht zusammenhängend.

4. Wir zeigen:

   a) Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend.

   b) Jede zusammenhängende Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ ist ein Intervall.

   c) Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ ist wegzusammenhängend.

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir beschränken uns zuerst auf I offen. Wir nehmen widerspruchsweise an, dass es offene Mengen U und V in I gibt so, dass $U \cup V = I$, $U \cap V = \emptyset$ und $U \neq \emptyset \neq V$. Da I offen ist, sind U und V auch in $\mathbb{R}$ offen. Sei nun $u \in U$ und $v \in V$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $u < v$. Betrachte nun die Menge $S = \{x \in U : x < v\}$. Diese Menge ist nichtleer, da $u \in S$ und durch v nach oben Beschränkt. Somit existiert wegen der Supremumseigenschaft der reellen Zahlen das Supremum $s = \sup(S)$. Offensichtlich gilt $u \leq s \leq v$ und somit ist $s \in I = U \cup V$. Falls $s \in U$ ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \in U$ ist (da U offen ist). Dann ist jedoch $v \geq s + \varepsilon$ und somit ist $s + \frac{\varepsilon}{2}$ in S, was ein Widerspruch zu $s = \sup(S)$ ist. Falls hingegen s in V ist, so gibt es ebenfalls ein $\varepsilon > 0$ so, dass $(s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset V$ ist. Somit sind alle Elemente in S kleiner als $s - \frac{\varepsilon}{2}$, was ein Widerspruch dazu ist, dass s die kleinste obere Schranke von S ist. Wir erhalten also in beiden Fällen einen Widerspruch und somit ist gezeigt, dass offene Intervalle in $\mathbb{R}$ zusammenhängend sind.

Sei nun I ein beliebiges Intervall in $\mathbb{R}$. Wir nehmen wiederum an, es gäbe offene Mengen $U, V \subset \mathbb{R}$ so, dass $U \cap V = \emptyset$, $I \subset U \cup V$ und $I \cap U \neq \emptyset \neq I \cap V$. Da die Mengen U und V jedoch offen und nichtleer sind, enthalten sie mindestens je einen offenen Ball und somit gilt auch $I^\circ \cap U \neq \emptyset \neq I^\circ \cap V$. I° ist jedoch ein offenes Intervall und somit zusammenhängend. Widerspruch.

(b) Wir beweisen die Kontraposition. Sei also $A \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Dann gibt es $x, y \in A$ mit $x < y$ so, dass es ein $z \in \mathbb{R} \setminus A$ gibt mit $x < z < y$. Dann sind jedoch die Mengen $(-\infty, z) \cap A$ und $(z, \infty) \cap A$ offen in A und nicht leer (da die Mengen entweder x oder y enthalten). Zudem sind diese beiden Mengen disjunkt und ihre Vereinigung ist A. Damit ist gezeigt, dass A nicht zusammenhängend ist.

(c) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $x, y \in I$. Dann ist $\gamma : [0,1] \to I$, $t \mapsto (1-t)x + ty$ ein stetiger Weg von x nach y; $\gamma([0,1]) \subset I$ gilt weil $\gamma(t) = x + t(y-x)$ für $t \in [0,1]$ zwischen $x, y \in I$ und somit in I liegt.

Bemerkung. In der Vorlesung wurde gezeigt dass jeder wegzusammenhängende topologische Raum zusammenhängend ist. Dort wird benutzt dass $[0,1]$ zusammenhängend ist.

5. Sei $U \subset \mathbb{R}$ offen. (Wir versehen $\mathbb{R}$ immer mit der Standardtopologie; diese ist durch die euklidische Metrik induziert.) Betrachte für jedes $x \in U$ die Kollektion $\mathcal{J}_x$ aller offenen Intervalle I mit $x \in I \subset U$. Eine Vereinigung einer Familie von offenen Intervallen mit mindestens einem gemeinsamen Punkt ist wieder ein offenes *Intervall*. Daher ist $J_x := \bigcup_{I \in \mathcal{J}_x} I$ ein offenes Intervall, das grösste Element von $\mathcal{J}_x$. Wenn $x, y \in U$, dann gilt entweder $J_x = J_y$ oder $J_x \cap J_y = \emptyset$; ansonsten wäre nämlich $J_x \cup J_y$ ein grösseres offenes Intervall als J_x in $\mathcal{J}_x$. Setze $\mathcal{J} := \{J_x : x \in U\}$. Die (verschiedenen) Elemente von $\mathcal{J}$ sind disjunkt und $U = \bigcup_{J \in \mathcal{J}} J$. Für jedes $J \in \mathcal{J}$ wähle eine rationale Zahl $f(J) \in J$. Die so definierte Abbildung $f : \mathcal{J} \to \mathbb{Q}$ ist injektiv, nämlich wenn $J, J' \in \mathcal{J}$ und $J \neq J'$ dann ist $J \cap J' = \emptyset$; folglich ist $\mathcal{J}$ abzählbar.

6. (a) Jedes C_n, $n \in \mathbb{N}$, ist abgeschlossen. Damit ist C ein Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen und somit abgeschlossen.
(b) Die Cantor-Menge C ist genau die Menge aller $x \in [0,1]$ welche eine Entwicklung zur Basis 3 der Form

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j} \quad \text{mit } a_j \in \{0,2\} \text{ für alle } j \in \mathbb{N} \tag{1}$$

besitzen. Gegeben $x \in C$, schreibe x wie in (1) und setze

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} b_j 2^{-j} \quad \text{wobei } b_j := \frac{a_j}{2} \in \{0,1\}.$$

Dies definiert eine *surjektive* Abbildung $f : C \to [0,1]$. (Warum?) Also $\mathrm{card}(C) \geq \mathrm{card}([0,1])$, und inbesondere ist C überabzählbar.
(c) Seien $x, y \in C$ mit $x \neq y$. Für n gross genug gilt

$$\frac{1}{3^{n-1}} < |x - y|.$$

Da C_n eine disjunkte Vereinigung von abgeschlossenen Intervallen der Länge $\frac{1}{3^{n-1}}$ ist, liegen x, y darum in unterschliedlichen dieser Intervalle, welche ausserdem positiven Abstand zueinander haben. x, y liegen also in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von C_n. Weil $C \subset C_n$ müssen x, y damit auch in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von C liegen. (Warum?) Dies beweist dass die Zusammenhangskomponenten der Cantor-Menge $C \subset [0,1]$ alle einpunktige Mengen sind.